

Correction du DM n°2

Exercice 1

$$1. \text{ On a } \begin{cases} P_1 + P_2 = I_3 \\ 4P_1 + 9P_2 = A \end{cases} \iff \begin{cases} P_1 + P_2 = I_3 \\ 5P_2 = A - 4I_3 \end{cases} \iff \begin{cases} P_1 = I_3 - \frac{1}{5}(A - 4I_3) \\ P_2 = \frac{1}{5}(A - 4I_3) \end{cases}$$

d'où

$$P_1 = \frac{9}{5}I_3 - \frac{1}{5}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{5}(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) On calcule

$$P_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = P_1 \quad P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$A^k = (4P_1 + 9P_2)^k \quad \text{d'après la question 1}$$

$$= \sum_{i=0}^k (4P_1)^i (9P_2)^{k-i} \quad \text{car } P_1 \text{ et } P_2 \text{ commutent d'après la question 2.a}$$

$$= \sum_{i=0}^k 4^i 9^{k-i} P_1^i P_2^{k-i}$$

or pour tout $i \geq 1$, $P_1^i = P_1$ et $P_2^i = P_2$ par récurrence immédiate car $P_1^2 = P_1$ et $P_2^2 = P_2$

$$= 4^0 9^{k-0} P_1^0 P_2^k + 4^k 9^{k-k} P_1^k P_2^{k-k} \quad \text{car } P_1^i P_2^{k-i} = P_1 P_2 = 0 \text{ dès que } i \geq 1 \text{ et } k-i \geq 1$$

$$= 4^k P_1^k + 9^k P_2^k$$

Remarque : on pouvait aussi montrer le résultat par récurrence.

3. En posant $B = 2P_1 + 3P_2$, on a $B^2 = (2P_1 + 3P_2)^2 = 4P_1^2 + 6P_1P_2 + 6P_2P_1 + 9P_2^2 = 4P_1 + 9P_2 = A$ d'après les résultats de la question 2.a.

$$\text{Ainsi, la matrice } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ vérifie } B^2 = A.$$

Exercice 2

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!} \end{aligned}$$

car r est fixé donc $n(n-1) \cdots (n-r+1)$ est un polynôme en n de degré r et de terme dominant n^r .

(b) $x \in]0, 1[$ donc par croissance comparée $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r x^n = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2} x^n = 0$.

(c) D'après les questions précédentes, $n^2 x^n \binom{n}{r} x^n \sim \frac{n^{r+2} x^n}{r!}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 x^n \binom{n}{r} x^n = 0$. On en déduit que $\binom{n}{r} x^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente donc la série $\sum \binom{n}{r} x^n$ est convergente d'après le TCSP.

2.

3. (a) $S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (on reconnaît une série géométrique).

(b) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}(1-x)S_{r+1} &= S_{r+1} - xS_{r+1} \\ &= \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n+1}{r+1} x^{n+1} - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \\ &= \binom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \left[\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1} \right] x^{n+1}\end{aligned}$$

Or la formule du triangle de Pascal affirme que $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ d'où :

$$\begin{aligned}&= \binom{r}{r} x^{r+1} + x \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n && \text{car } \binom{r+1}{r+1} = \binom{r}{r} = 1 \\ &= x \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n \\ &= xS_r\end{aligned}$$

(c) On raisonne par récurrence sur r : $S_0 = \frac{1}{1-x}$ d'après la question 3.(a) et $\frac{x^0}{(1-x)^{0+1}} = \frac{1}{1-x}$ donc l'égalité est vraie pour $r = 0$.

Supposons que $S_r = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$ pour un certain entier r , alors $S_{r+1} = \frac{x}{1-x} S_r$ d'après la question 3.(b) donc $S_{r+1} = \frac{x^{r+1}}{(1-x)^{r+2}}$ et l'égalité est donc vérifiée au rang $r+1$.

On en conclut que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

(d) En divisant l'égalité précédente par x^r on obtient $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.